COSMOLOGIE. — *Entropie maximale et cosmologie de Friedman.*

Note (*) de MM. **Jean-Pierre Petit** et **Guy Monnet**, présentée par M. André Lichnerowicz.

En 1934, Milne et McCrea [([1]), ([2])] montrèrent que l'on pouvait, dans une approche newtonnienne, en se basant sur les équations d'Euler, nanties d'hypothèses concernant le champ de vitesse et l'homogénéité de la solution, retrouver les aspects essentiels de la cosmologie relativiste de Friedman. L'analyse suivante atteint le même but, mais avec une économie d'hypothèses, la seule étant que l'entropie est maximale en tout point. La constance de la densité de matière dans tout l'espace et le champ de vitesse de Hubble sont ici déduits et non introduits *a priori.*

Pour des valeurs données de la densité de particules n, de la température T et de la vitesse macroscopique $\vec{C}_0$ la fonction de distribution donnant une entropie maximale est la fonction maxwellienne :

(1) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} e^{-mC^2/2kT}.$$

Introduisons cette solution dans l'équation de Vlasov, écrite en termes de vitesse résiduelle (d'agitation) :

(2) $$\frac{\partial \log f}{\partial t} + \vec{C}\cdot\overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial r}} + \vec{C}_0\cdot\overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial r}} + \left(\vec{g} - \overrightarrow{\frac{DC_0}{Dt}}\right)\cdot\overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial C}} - \overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial C}}\,C : \overrightarrow{\frac{\partial C_0}{\partial r}} = 0.$$

Nous obtenons un système de vingt équations aux dérivées partielles. Les seize premières donnent un champ homogène de température :

(3) $$\overrightarrow{\frac{\partial T}{\partial r}} = 0$$

et une vitesse macroscopique obéissant à

(4) $$\vec{C}_0 = -\frac{1}{2T}\frac{dT}{dt}\vec{r} + \overrightarrow{\omega(t)}\times\vec{r}.$$

Le premier terme donne la loi de Hubble. Le second correspond à un mouvement de rotation en corps solide, instationnaire.

Laissons de côté la solution avec rotation. Combinant les dix-septième, dix-huitième et dix-neuvième équations du système différentiel avec l'équation de Poisson, nous obtenons :

(5) $$\Delta\psi = h(t)\,T^{3/2}\exp -\frac{m}{kT}(\psi+\psi_1)$$

où

$$\psi_1 = \frac{r^2}{2}(\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2) \qquad \text{et} \qquad \varphi \equiv \varphi(t) \equiv \operatorname{Log}\frac{1}{\sqrt{T}}. \tag{6}$$

La vingtième équation traduit l'isentropie du phénomène :

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{n}{T^{3/2}}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2T}\frac{dT}{dt}r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{n}{T^{3/2}}\right) = 0. \tag{7}$$

$\psi(\vec{r}, t)$ étant défini à une fonction du temps près, la condition $\psi(0, t) = 0$ permet de déterminer la fonction $h(t)$. Nous allons maintenant rendre les équations adimensionnelles en prenant en particulier comme temps et longueur de référence les temps et longueurs de Jeans :

$$t_j = \frac{1}{\sqrt{4\pi G m n_0}}, \qquad l_j = \sqrt{\frac{k T_0}{4\pi G m^2 n_0}}. \tag{8}$$

Pour simplifier, nous avons conservé les mêmes notations :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{\varphi} r \dfrac{\partial}{\partial r}\right)(\Delta\psi\, e^{3\varphi}) = 0, & (9) \\ \Delta\psi\, e^{3\varphi} = \exp\left\{\left(\psi + \dfrac{r^2}{3}(\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2)\right)e^{2\varphi}\right\}, & (10) \\ \Delta\psi = n. & (11) \end{cases}$$

Posons :

$$e^{2\varphi}\left(\psi + \frac{r^2}{2}(\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2)\right) \equiv \chi. \tag{12}$$

Les deux équations (9) et (10) donnent :

$$\frac{D\chi}{Dt} = 0. \tag{13}$$

A partir de (12) nous allons ensuite calculer $\Delta\psi\, e^{3\varphi}$ que nous introduisons dans l'équation (9). Nous obtenons :

$$\dot{\varphi}\, e^{\varphi}\, \Delta\chi = 3\frac{d}{dt}\left[(\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2)\, e^{\varphi}\right]. \tag{14}$$

Ceci montre que $\Delta\chi$ ne dépend que du temps, et, par le fait, $\Delta\psi = n$ également.

Conclusion : la solution maxwellienne instationnaire correspond à une densité de matière constante à travers tout l'espace. Le potentiel étant défini à une fonction du temps près, la solution unique du système (9), (10), (11) est

$$\boxed{\psi = -\frac{r^2}{2}(\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2).} \tag{15}$$

Ce potentiel donne un champ gravitationnel non nul :

(16) $$\vec{g} = \vec{r}(\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2).$$

Nous avons par ailleurs :

$$n = \Delta\psi = T^{3/2} = -3(\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2) = e^{-3\varphi}.$$

D'où l'équation en φ :

$$\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2+\frac{1}{3}e^{-3\varphi} = 0.$$

Posons $\varphi = \log u$ ou $u = 1/\sqrt{T}$ il vient :

(17) $$\boxed{u^2\ddot{u}+\frac{1}{3} = 0.}$$

Cherchons maintenant le mouvement d'un point quelconque par rapport à une origine, supposée fixe.

Soit M le point, O l'origine. Nous avons, avec $\overrightarrow{OM} = \vec{R}(t)$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -\frac{1}{2T}\frac{dT}{dt}\vec{R}.$$

D'où

(18) $$\vec{R} = \vec{R}_0 u.$$

On retrouve les trois solutions de la cosmologie de Friedman.

Modèle euclidien :

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,t^{2/3}.$$

Modèle elliptique :

$$\left\{\begin{aligned} R &= a(1-\cos\omega),\\ t &= \sqrt{3}\,a^{3/2}(\omega-\sin\omega).\end{aligned}\right.$$

Modèle hyperbolique :

$$\left\{\begin{aligned} R &= a(\mathrm{ch}\,\omega-1),\\ t &= \sqrt{3}\,a^{3/2}(\mathrm{sh}\,\omega-\omega).\end{aligned}\right.$$

La température T varie comme $1/R^2$ et la densité comme $1/R^3$. La pression, puisque $p = nkT$ varie comme $1/R^5$.

Discussion. — Comme on le voit, la solution maxwellienne n'est pas stable. Suivant les conditions initiales, le système tend vers un état singulier hyperdense, ou présente une expansion indéfinie. Il n'est pas étonnant d'obtenir une solution symétrique par rapport au temps, car l'équation de Vlasov conserve l'entropie.

Une situation où les dérivées par rapport au temps seraient nulles (solution évidemment elliptique), avec R = 1 en ce point, évoluerait vers l'implosion en un temps égal à 1,92 fois le temps de Jeans (free fall time).

Il serait intéressant de rechercher quelle hypothèse, faite sur la fonction de distribution, permettrait d'obtenir des modèles à constante cosmologique non nulle. Nous nous proposons de poursuivre les recherches dans cette direction.

(*) Séance du 7 avril 1975.

(1) W. H. McCrea et E. A. Milne, *Quart. J. Math.*, 5, 1934, p. 73.
(2) W. H. McCrea, *Astronom. J.*, 60, 1955, p. 271.

Observatoire de Marseille,
1, *place Le-Verrier,*
13004 *Marseille.*