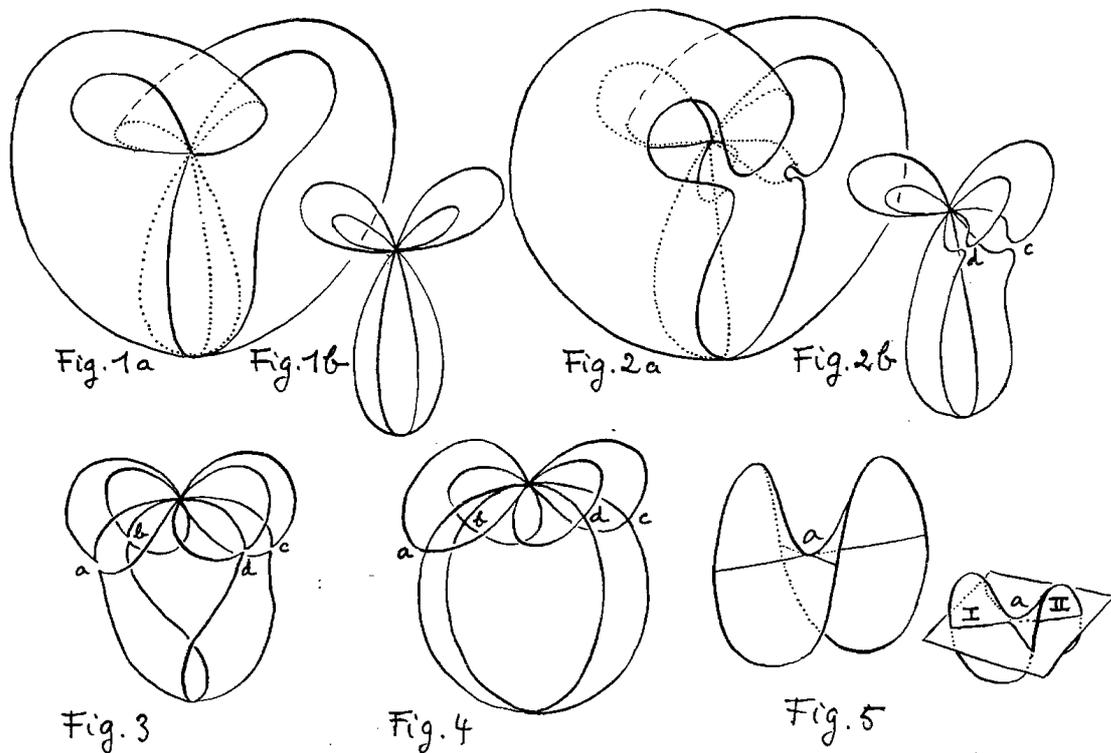


GÉOMÉTRIE. — *Le modèle central fermé de Bernard Morin. Note (*) de Jean-Pierre Petit, présentée par André Lichnerowicz.*

Une homotopie régulière permettant le retournement de la sphère a été décrite dans une Note précédente. Dans une Note ultérieure, B. Morin a pu fournir une description analytique du retournement. Mais, dans cette variante, le modèle central est différent. Ce travail indique comment on peut passer d'un modèle central à l'autre par quatre modifications génériques de type (D_1) .

A regular homotopy, giving the eversion of the sphere, has been described in a previous Note. Later, B. Morin found parametric equations describing the eversion. But, then, the central model is different. This work shows how the first model can be converted into this new closed central model, through four generic modifications (D_1) .

1. INTRODUCTION. — Le problème du retournement de la sphère a déjà fait l'objet de trois Notes ([1], [2], [3]). L'étape centrale du retournement imaginé par Bernard Morin se trouve décrite sur les figures 12 à 17 de la Note [1]. Dans la Note [3] B. Morin a donné des équations décrivant également le retournement de la sphère, mais dans ce cas l'étape centrale est



légèrement différente. Et cet auteur appelle celle-ci le modèle central fermé. En utilisant l'ordinateur, des américains tentent actuellement de décrire les différentes étapes de cette version, y compris ce modèle central. Mais l'ordinateur, s'il surclasse l'homme dans sa capacité à intégrer des objets géométriques très complexes, surtout si on lui en fournit une description analytique, ne sait pas encore, faute de l'avoir appris, choisir une perspective lisible. Aussi il n'existe pas encore, à ce jour, de description correcte de ce modèle central fermé, clef de l'opération envisagée. Nous avons donc jugé utile de le décrire dans cette Note.

2. DESCRIPTION DU MODÈLE CENTRAL FERMÉ. — Il dérive du modèle central ouvert (voir Note [1]) que nous avons reproduit sur la figure 1 avec sa courbe de self intersection. Comme celui-ci il présentera des contacts de type (D_1) et ce n'est donc pas une immersion de la sphère. Le passage de l'un à l'autre s'effectue en créant quatre contacts de type (D_1) . Ces opérations ferment les quatre oreilles du modèle. Sur la figure 2 on évoque un début de fermeture de deux des oreilles (c et d). Et on trouvera sur la figure 2b la déformation correspondante de la courbe de self intersection.

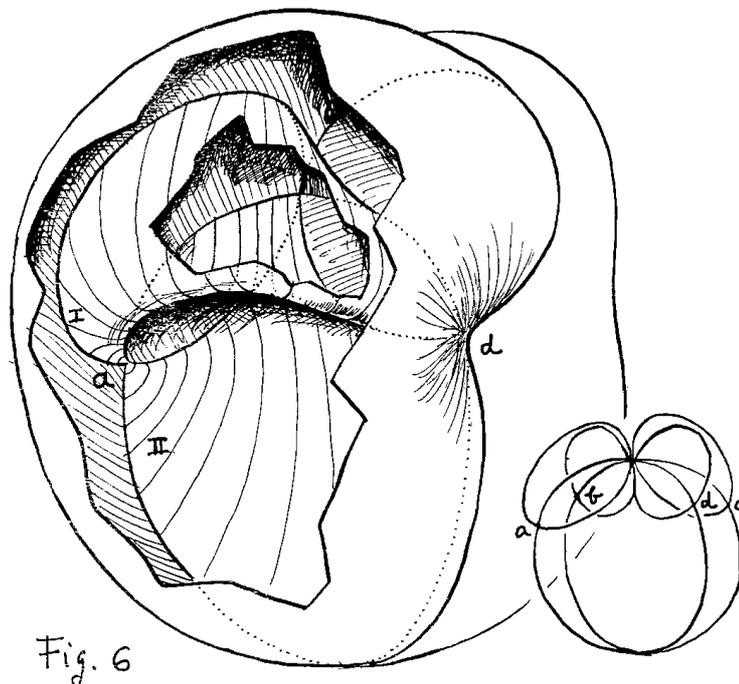


Fig. 6

Les modifications génériques de type (D_1) provoquent des changements dans les modes de raccordement des arcs de la courbe de self intersection. On les identifiera facilement sur les figures 3 et 4. Dans la figure 4 on a opéré un mouvement de torsion à la base du modèle [où se situe un contact de type (D_1)]. La courbe de la figure 3 se compose alors de deux cercles situés dans des plans orthogonaux et d'une courbe en forme d'hélice quadripale, à la partie supérieure. Il reste maintenant à habiller cette courbe de self intersection avec les différentes nappes de la surface. Extérieurement, le modèle rappellera un melon à quatre tranches. Mais toute la difficulté se trouve alors reportée à l'intérieur de celui-ci. Nous avons ménagé dans la figure 6 une ouverture dans l'une des coques extérieures. On aperçoit des arcs de la courbe de self intersection, facilement identifiables. Il est nécessaire de bien comprendre ce qui se passe au voisinage des points a , b , c , d . Revenons pour ceci à la figure 5. Celle-ci illustre ce qui se passe au voisinage d'un contact de type (D_1) . On rappelle que la modification (D_1) se traduit par le mouvement d'un plan vis-à-vis d'une surface de type parabolôïde hyperbolique. Situons-nous près du point a . Sur la figure 6 des hachures fines indiquent la nappe tangente au Ph, lequel est constitué par les portions repérées I et II. La portion I se distord en une sorte de tube qui vient aboutir en d , où se trouve également un contact de type (D_1) . Une ouverture a été ménagée dans ce « tube », et on aperçoit en arrière plan le point quadruple du modèle.

3. REMARQUE SUR LA SURFACE DE BOY. — Cette surface a été décrite dans la Note [1] (fig. 6 à 11). Pour la bonne compréhension, on a figuré en [7] la façon dont le ruban de Möbius pouvait se situer sur celle-ci. On sait que la première variante du retournement de la sphère, due à Phillips, passait par un double revêtement de cette surface. De même, dans le travail [4] l'auteur a indiqué un retournement non trivial du tore passant par un double revêtement de la surface de Klein.

Toute construction cosmologique repose sur un certain nombre d'*a priori* géométriques. Ainsi le modèle qui est associé à un univers fermé est une sphère S^3 . Les trous noirs rompent cette régularité spatiale et on leur attribue la propriété d'être des passages, soit vers d'autres

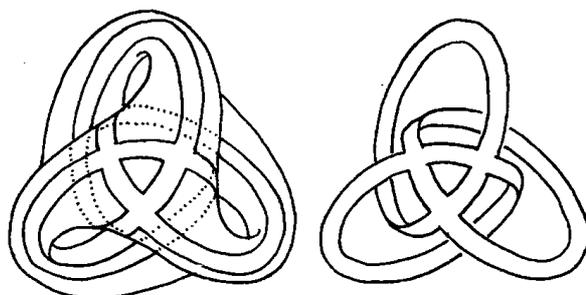


Fig. 7 a

Fig. 7 b

Univers, soit vers d'autres régions d'un même Univers. Nous voudrions ici suggérer que ces passages puissent relier des régions *antipodales* de la sphère S^3 . Donnons une image didactique de cette idée : considérons la sphère ordinaire, et relient tous les couples de points antipodaux par des fils, que nous allons raccourcir en conservant la surface de la sphère. Nous allons par ailleurs permettre à cette sphère de s'autotraverser. Elle se configurera naturellement suivant un double revêtement de la surface de Boy.

4. UNIVERS JUMEAUX. — L'auteur a développé des modèles d'Univers Jumeaux [7], ou d'Univers où les régions antipodales sont en interaction [8]. Le modèle géométrique adéquat serait alors une surface S^4 immergée dans un espace de dimension supérieure, de manière à lui faire revêtir deux fois une S^4 unilatère. Une des difficultés de la cosmologie concerne la localisation de l'antimatière. Il n'y a pas d'impossibilité à ce que celle-ci soit présente dans l'Univers tel que nous nous le représentons actuellement; la première image consiste à imaginer un mélange plus ou moins homogène, la différenciation s'effectuant soit au niveau des galaxies, soit au niveau des amas. La seconde image consiste à partager une sphère S^3 en deux régions, séparées par une frontière équatoriale. Mais on peut suggérer que l'antimatière ne soit en fait qu'une image commode recouvrant des propriétés géométriques insoupçonnées de notre Univers.

(*) Reçue le 10 août 1979 et acceptée le 24 septembre 1979.

[1] B. MORIN et J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 767.

[2] B. MORIN et J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 791.

[3] B. MORIN, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 879.

[4] J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 927.

[5] B. MORIN et J. P. PETIT, *pour la Science*, janvier 1979, p. 34-49.

[6] A. PHILLIPS, *Scientific American*, 214, 1966, p. 112-120.

[7] J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 1315.

[8] J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 1413.