

GÉOMÉTRIE. — *Une représentation analytique de la surface de Boy.* Note (\*) de **Jean-Pierre Petit** et **Jérôme Souriau**, présentée par André Lichnerowicz.

On présente une représentation analytique de la surface de Boy permettant de tracer celle-ci.

*An analytic representation of the Boy's surface is presented, with associated computer's design.*

1. INTRODUCTION. — La surface inventée en 1901 par le mathématicien Werner Boy, élève de Hilbert, est bien connue des mathématiciens. Elle peut intervenir comme étape centrale du retournement de la sphère ([1] et [2]).

En 1979 (J.-P. P.) avait construit une maquette en fil métallique, à pôle unique, mettant en évidence les positions que devaient occuper les lignes méridiennes de la surface. Un second travail, effectué en 1980 avec le sculpteur M. Sauze permit de construire une seconde maquette où les courbes méridiennes se situaient dans des plans et semblaient assez voisines d'ellipses. A partir de cette maquette il semblait possible de construire une représentation analytique d'une surface ayant la topologie de la surface de Boy, et dont les méridiens soient des ellipses passant par un pôle unique.

2. COMMENT ENGENDRER LA SURFACE DE BOY A L'AIDE D'ELLIPSES. — Situons le pôle à l'origine des coordonnées. En ce point la surface sera tangente au plan (XOY). Elle aura donc l'axe OZ comme axe de symétrie ternaire (voir *fig. 1*). Les courbes méridiennes sont des ellipses situées dans des plans  $P_\mu$ . Soit  $OX_1$  la trace dans le plan XOY d'un plan  $P_\mu$ . Appelons  $\mu$  l'angle (OX,  $OX_1$ ). Dans ce plan  $P_\mu$ , situons un second axe  $OZ_1$  perpendiculaire à  $OX_1$ . Et appelons  $\alpha$  l'angle (OZ,  $OZ_1$ ).

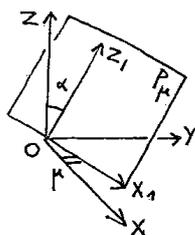


Fig. 1

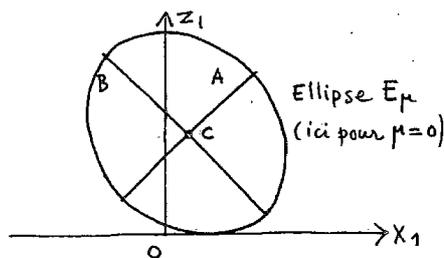


Fig. 2

Le premier paramètre de cette représentation analytique sera l'angle  $\mu$ . On considérera  $\alpha$  comme une fonction de  $\mu$  (qui sera définie plus loin). Dans le plan  $P_\mu$  nous allons maintenant tracer une ellipse tangente en O à  $OX_1$  (voir *fig. 2*). Nous prendrons les axes de cette ellipse parallèles aux bissectrices de  $X_1 OZ_1$ . Appelons  $A(\mu)$  et  $B(\mu)$  les valeurs des axes de cette ellipse. Cette ellipse  $E_\mu$  sera engendrée à l'aide d'un second paramètre libre  $\theta$ .

*En résumé*, on obtiendra les coordonnées  $X(\mu, \theta)$ ,  $Y(\mu, \theta)$ ,  $Z(\mu, \theta)$  du point courant de la surface.

Dans cette approche semi-empirique, des mesures effectuées par (J. S.) sur la maquette permirent une approche des fonctions  $\alpha(\mu)$ ,  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$ . La surface fut alors tracée par ordinateur « Apple-II » et on obtint des coupes à  $Z = \text{Cte}$ . L'examen de ces coupes permettant de déterminer l'identité topologique avec la surface de Boy. Celle-ci ne put être obtenue qu'au prix d'une expérimentation numérique (J. S.) qui permit d'éliminer des singularités parasites (apparition de couples de points cuspidaux).

Nous avons été amenés à retenir :

$$(1) \quad A(\mu) \equiv 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) + 1,98 \sin(3\mu - \pi/6),$$

$$(2) \quad B(\mu) \equiv 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) - 1,98 \sin(3\mu - \pi/6)$$

$$(3) \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{8} \sin 3\mu.$$

Dans le repère  $X_1 OZ_1$  les coordonnées du centre de l'ellipse  $E_\mu$  sont :

$$(4) \quad X_c = \frac{(A^2 - B^2)}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$(5) \quad Z_c = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Dans ce même repère les coordonnées du point courant de l'ellipse sont :

$$(6) \quad X_1 = \frac{A^2 - B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + A \cos \theta - B \sin \theta,$$

$$(7) \quad Z_1 = \sqrt{A^2 + B^2} + A \cos \theta + B \sin \theta.$$

Et les coordonnées  $x, y, z$  sont données par :

$$(8) \quad \begin{cases} X = X_1 \cos \mu - Z_1 \sin \alpha \sin \mu, \\ Y = X_1 \sin \mu + Z_1 \sin \alpha \cos \mu, \\ Z = Z_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

3. ANALYSE DES RÉSULTATS. — Sur la figure 3 on trouvera les fonctions périodiques  $A(\mu)$  et  $B(\mu)$ .  $B$  est simplement déphasé par rapport à  $A$ .

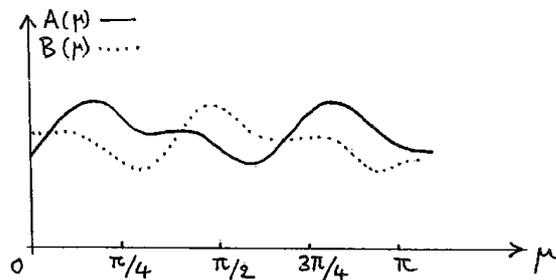


Fig. 3

En utilisant un micro-ordinateur « Apple-II » nous avons tracé une vue de la surface de Boy montrant les lignes méridiennes elliptiques, sécantes au pôle unique.

Passons aux coupes  $Z = \text{Cte}$ . Leur équation découle de celle de la surface. Elles sont tracées dans les figures (5a) à (5c). Toutes les figures ont une symétrie ternaire, comme on le voit. Les trois premières coupes présentent des points d'inflexion. Ces légères irrégularités sont la trace de singularités cuspidales qui apparaissent dans cette zone avant ajustement des différents coefficients. Dans la figure (5j) on trouve trois points scellés. Les deux cercles immergés dans cette figure (5j) ont des voisinages de bandes de Möbius dans la surface, trois fois demi-tournés par rapport au plan horizontal  $z = \text{Cte}$ .

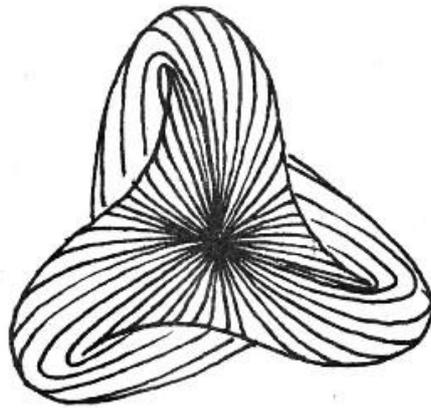


Fig. 4. — Lignes méridiennes ( $E_{\mu}$ ) de la surface de Boy (tracé par « Apple-II »).

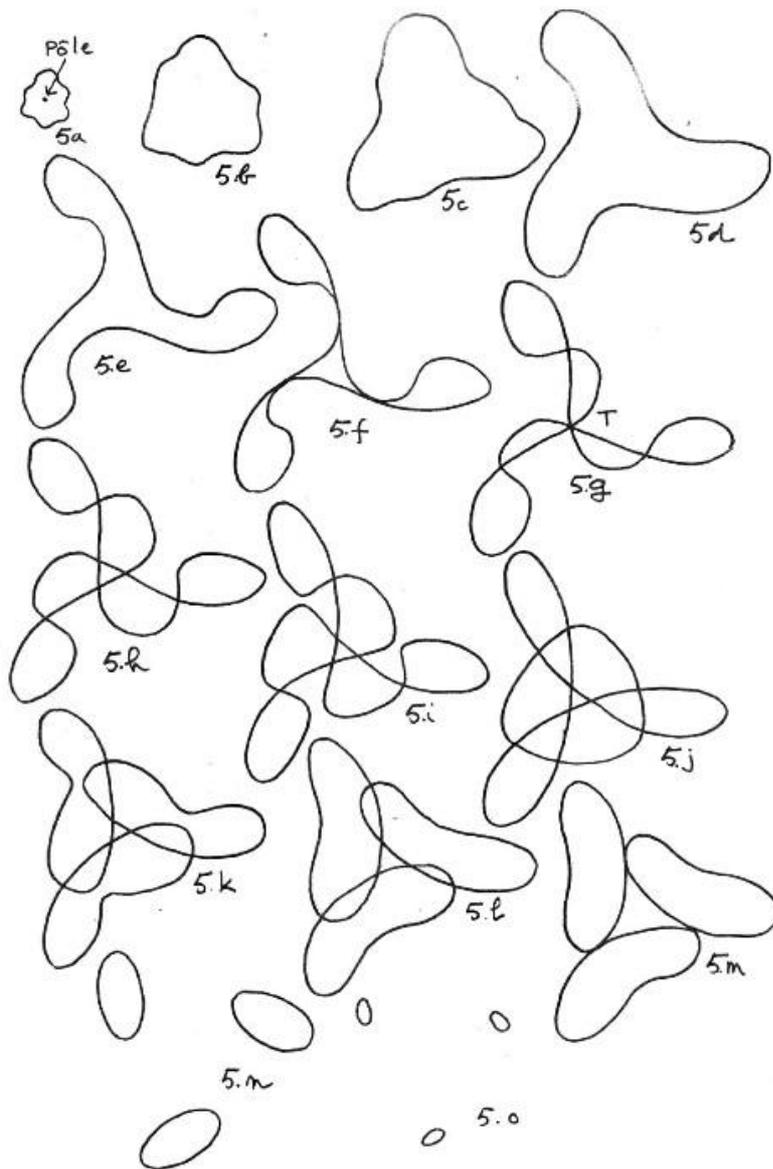


Fig. 5

La coupe (5 *g*) passe par le point triple de la surface. Les coupes (5 *f*), (5 *j*) et (5 *m*) correspondent à des situations limites où des changements s'opèrent dans le mode de raccordement des arcs de courbe.

Dans la figure (5 *j*) nous avons indiqué les points scellés par  $\frac{+}{-} \left| \frac{-}{+} \right.$ . La fonction  $z$  restreinte à la surface a un maximum, trois points scellés et trois points minimaux, ce qui lui donne la caractéristique du plan projectif  $\chi = 1 = 1 - 3 + 3$ , mettant en évidence la topologie de la surface.

Nous espérons trouver une représentation algébrique, si possible d'un degré bas.

(\*) Remise le 15 juin 1981, acceptée le 21 septembre 1981.

[1] A. PHILLIPS, *Turning a Sphere Inside Out*, Scientific American, 1966.

[2] B. MORIN, *Comptes rendus*, série B.

J.-P. P. : *Observatoire de Marseille, École des Beaux-Arts d'Aix-en-Provence,*  
9, rue Aude, 13100 Aix-en-Provence.

J. S. : 10, rue Mazarine, 13100 Aix-en-Provence.